Teoría de Juegos

Equilibrio Secuencial Débil

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

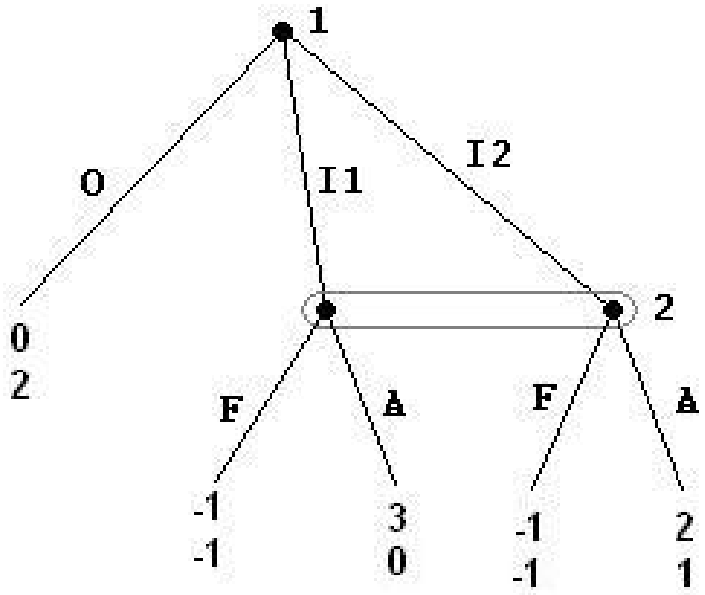
alugon@pucp.edu.pe

2023-1

Teoría de Juegos
Equilibrio Secuencial Débil

- Equilibrio Secuencial Débil
  - Introducción
  - Creencias
  - Evaluación
  - Actualización Bayesiana
  - Racionalidad secuencial
  - Equilibrio secuencial débil

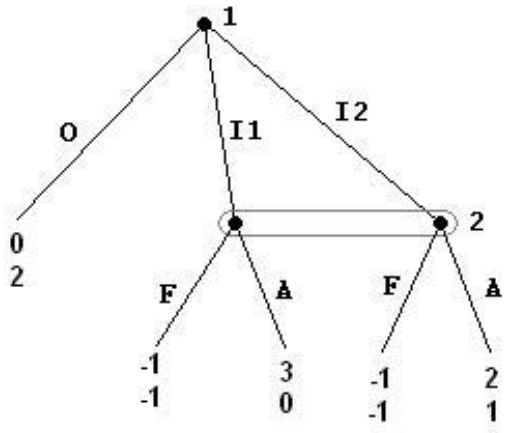
- Consideremos el siguiente juego en forma extensa:



⊙ Este juego tiene dos EqN: (O,F) y (I1,A).

⊙ Al no tener el juego subjuegos propios, ambos son también Perfectos en Subjuegos.

⊙ Sin embargo en el equilibrio (O,F) resulta difícil justificar que el jugador juegue realmente F.

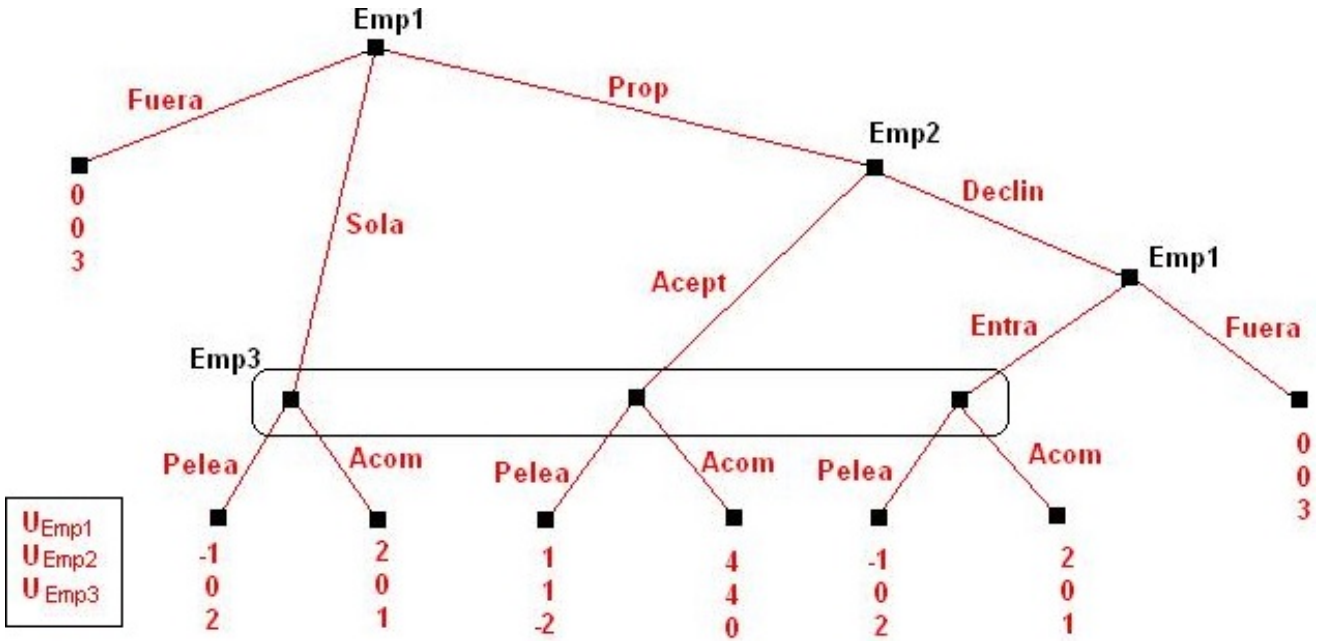


- En el conjunto de información del jugador 2 la acción F de 2 es "dominada estrictamente" por A.

⊙ El perfil (O,F) es un EN porque el conjunto de información del jugador 2 no está en el desarrollo del juego dado este perfil.

⊙ Pero por mínima que sea la probabilidad que el jugador asigne a que le toque jugar, mientras sea mayor a cero, él debería elegir A.

- Consideremos ahora el juego:



- Para Emp3, Pelea tiene mejor pago que Acom en los nodos a los extremos de su conjunto de información, mientras que Acom es mejor que Pelea en el nodo central.

⊙ La elección de Emp3 depende de en qué nodo **cree** que está.

- A cada conjunto de información le podemos asociar unas **creencias**.

⊙ Las creencias no tienen que ser determinísticas, pueden ser probabilidades. Un sistema de creencias asigna a cada conjunto de información una distribución de probabilidad.

Definición (Creencias)

Un sistema de creencias, μ, es una función que asigna a cada nodo un número entre cero y uno. Cumpliendo que para todo conjunto de información H

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

⊙ Sea $x \in H$ e i el jugador a quien le toca jugar en H. $\mu(x)$ es la probabilidad que asigna i a estar en x dado que está en H.

⊙ Como a cada nodo le corresponde una historia de acciones, las creencias en realidad son sobre las jugadas previas.

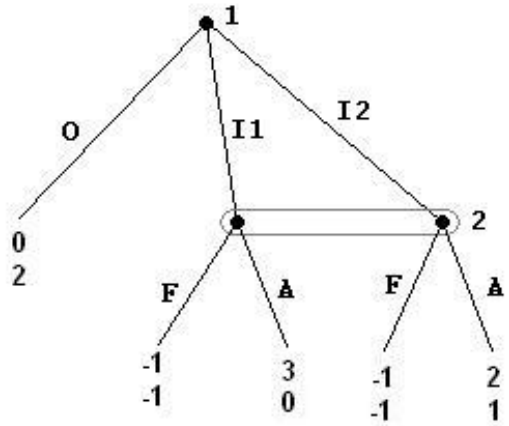
• Si juntamos un perfil de estrategias de comportamiento σ y un sistema de creencias μ tenemos una

Definición (Evaluación)

Dado un juego G en forma extensiva, una evaluación para G es un par (σ, μ), donde σ es un perfil de estrategias de comportamiento y μ un sistema de creencias.

⊙ Para ser claros al dar una creencia, le pondremos una etiqueta a cada nodo.

⊙ Los conjuntos de información de un solo nodo tienen una única creencias posible $\big(H = \{x\} \to \mu(x) = 1\big)$. Como regla no los escribiremos al dar una evaluación.



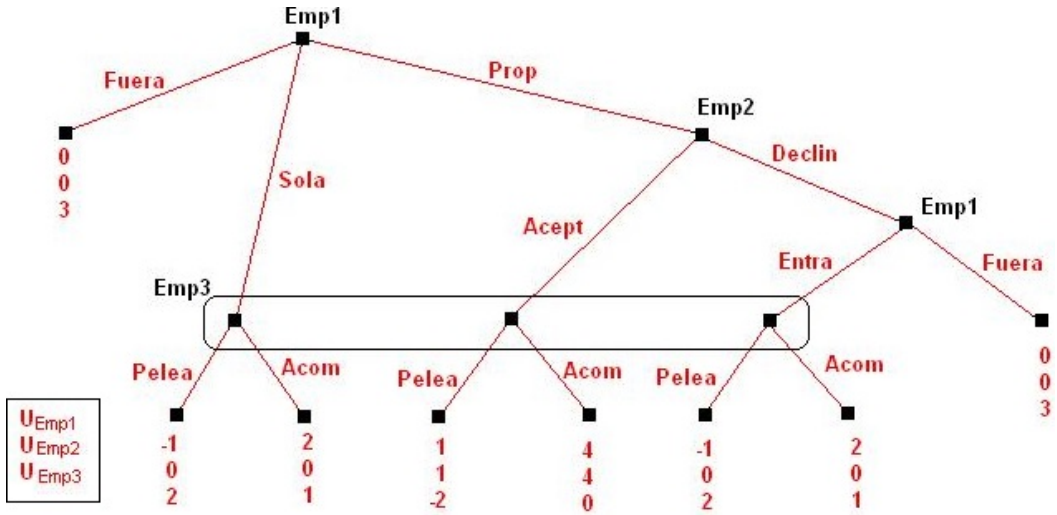
- Una evaluación para este juego es una estrategia de comportamiento

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & I1 & I2 & F & A \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & q_2 \end{array} \right)$$

con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y $q_1 + q_2 = 1$ y un sistema de creencias

$$\mu = \left(\begin{array}{cc} x & y \\ r_1 & r_2 \end{array} \right)$$

con $r_1 + r_2 = 1$



- Una evaluación para este juego es una estrategia de comportamiento

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|cc} F & S & P & A & D & E & F & P & A \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & q_2 & r_1 & r_2 & s_1 & s_2 \end{array} \right)$$

con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, $r_1 + r_2 = 1$ y $s_1 + s_2 = 1$ y un sistema de creencias

$$\mu = \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \right)$$

con $t_1 + t_2 + t_3 = 1$

- Para que una evaluación (σ, μ) sea razonable, creíble, consistente vamos a pedir:$\wr$

1. Las creencias en cada conjunto de información sean coherentes con las jugadas determinadas por el perfil de estrategias. ("hacia atrás")
2. La estrategia de cada jugador sea coherente con sus creencias. ("hacia adelante")

- La primera propiedad la formalizaremos por medio de la actualización Bayesiana y la segunda por medio de la racionalidad secuencial.

- Cada perfil de estrategias de comportamiento σ determina la probabilidad de cada acción en cada nodo y por lo tanto determina la probabilidad de la historia (la secuencia de acciones) que llevan a ese nodo.

⊙ Esa es la probabilidad de que el nodo sea parte del desarrollo del juego si se implementa el perfil σ.

⊙ Si al nodo x se llega por la secuencia de acciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definimos:

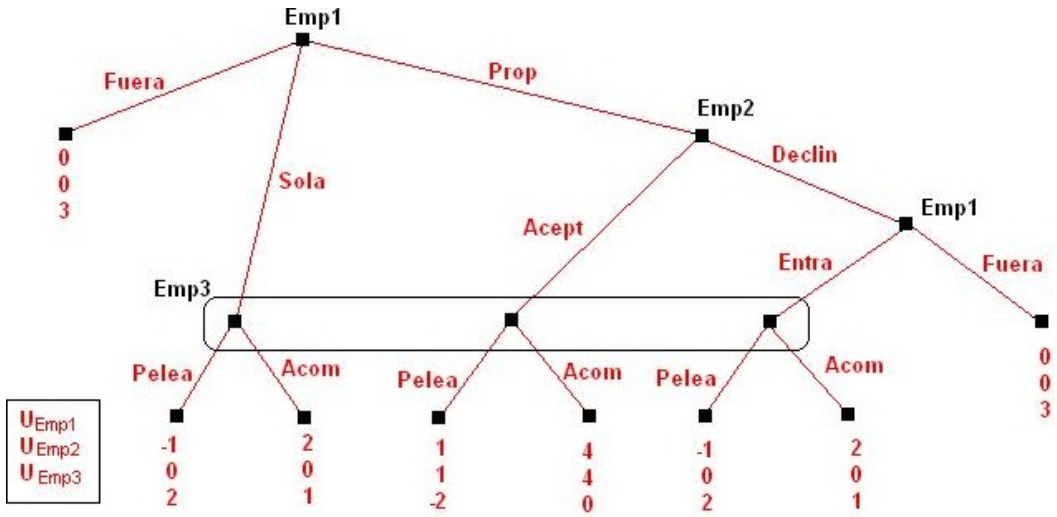
$$P_{o,\sigma}(x) = \sigma(a_1) \times \cdots \times \sigma(a_n)$$

la probabilidad de llegar al nodo x desde la raíz (o) si se implementa σ.

⊙ Con esto definimos:

$$P_{o,\sigma}(H) = \sum_{x \in H} P_{o,\sigma}(x)$$

la probabilidad de llegar al conjunto de información H desde la raíz (0) si se implementa σ.



- La estrategia de comportamiento

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|cc} F & S & P & A & D & E & F & P & A \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & q_2 & r_1 & r_2 & s_1 & s_2 \end{array} \right)$$

- Al nodo en el juega Emp2 se llega con probabilidad p_3
- Al segundo nodo de Emp1 se llega con probabilidad $p_3\ q_2$
- Al nodo x se llega con probabilidad p_2
- Al nodo y se llega con probabilidad $p_3\ q_1$
- Al nodo z se llega con probabilidad $p_3\ q_2\ r_1$

• Dadas estas probabilidades podemos calcular la probabilidad de estar en cierto nodo si sabemos que estamos de su conjunto de información:

$$P_{o,\sigma}(x|H) = \frac{P_{o,\sigma}(x)}{P_{o,\sigma}(H)}$$

⊙ Esta fórmula solo puede ser evaluada si $P_{o,\sigma}(H) > 0$, en ese caso diremos que H es alcanzable por σ

Definición (Actualización Bayesania)

Dado un juego en forma extensiva diremos que la evaluación (σ, μ) *satisface la actualización Bayesiana en los conjuntos de información alcanzables si para todo* H *con* $P_{o,\sigma}(H) > 0$ *y todo* $x \in H$ *se cumple:*

$$\mu(x) = P_{o,\sigma}(x|H)$$

- Para todo $x \in H$ con $P_{o,\sigma}(H) = 0$ las creencias no tienen restricción.

- Para cada nodo x definimos $Z(x)$ como el conjunto de todos los nodos terminales que son sucesores de x.

⊙ Para cada $z \in Z(x)$, supongamos que la secuencia de acciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son las que nos llevan de x a z, definimos:

$$P_{x,\sigma}(z) = \sigma(a_1) \times \cdots \times \sigma(a_n)$$

la probabilidad de llegar al nodo z desde el nodo x si se implementa σ.

- Si H es un conjunto de información del jugador i, para cada $x \in H$, $\mu(x)$ nos indica la probabilidad asignada por i a estar en x (dado que sabe que está en H),$P_{x,\sigma}(z)$ la probabilidad de llegar a z desde x y $\pi_i(z)$ el pago del jugador i en z.
- Juntando todo tenemos:

$$\pi_i(H|\sigma,\mu) = \sum_{x \in H} \left[\mu(x) \left(\sum_{z \in Z(x)} P_{x,\sigma}(z)\pi_i(z) \right) \right]$$

el pago esperado de i en H dadas su creencias y el perfil de estrategias.

Definición (Racionalidad Secuencial)

Dado un juego en forma extensiva y una evaluación (σ, μ) diremos que la estrategia σ_i del jugador i es secuencialmente racional si para todo H de i:

$$\pi_i(H|\sigma, \mu) \geq \pi_i(H|(\sigma_{-i}, \tau_i), \mu)$$

para toda estrategia τ_i de i.
Decimos que σ es secuencialmente racional si lo es para cada jugador i.

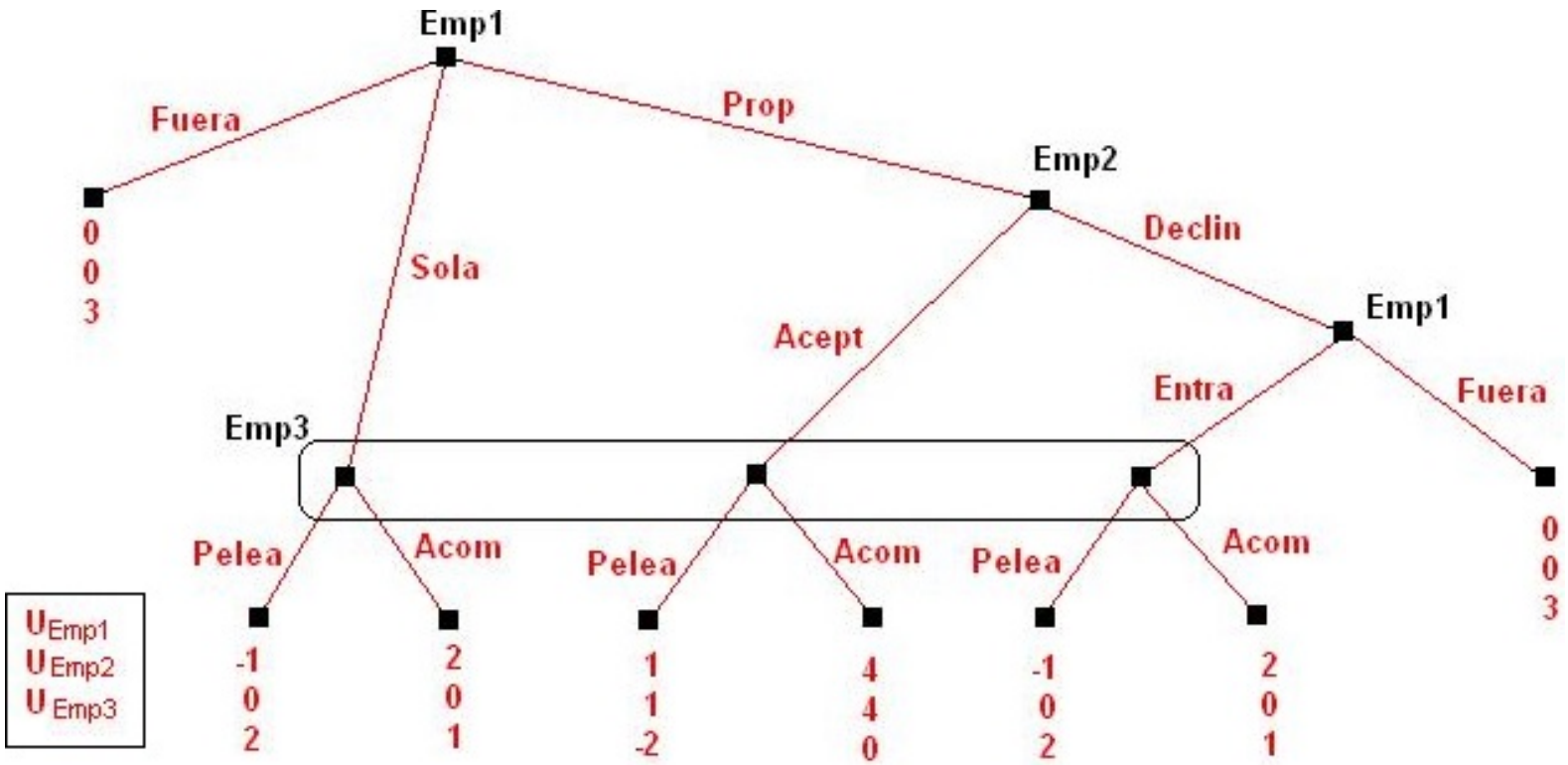
Definición (Equilibrio Secuencial Débil)

Dado un juego en forma extensiva, una evaluación (σ, μ) es un equilibrio secuencial débil si:

1. *Es secuencialmente racional*
2. *Satisface la actualización Bayesiana en los conjuntos de información alcanzables*

Teorema

Todo juego en forma extensiva finito tiene al menos un ESD


Emp1
Fuera
Prop
Emp2
0
0
3
Sola
Declin
Emp1
Acept
Entra
Fuera
Emp3
Pelea
Acom
Pelea
Acom
Pelea
Acom
0
0
3
-1
0
2
2
0
1
1
1
-2
4
4
0
-1
0
2
2
0
1
U Emp1
U Emp2
U Emp3

- El concepto de equilibrio secuencial débil es un refinamiento del EN:

Teorema

Dado un juego en forma extensiva si la evaluación (σ, μ) es un ESD entonces el perfil σ es un EN.

⊙ Hemos visto que no todo EN es parte de un ESD, por lo tanto el refinamiento es estricto.

⊙ El concepto de ENPSJ es también un refinamiento estricto del EN.

- Hemos visto ENPSJ que no son ESD$\wr$, pero será verdad que todo ESD induce un ENPSJ?

Consideremos el juego:

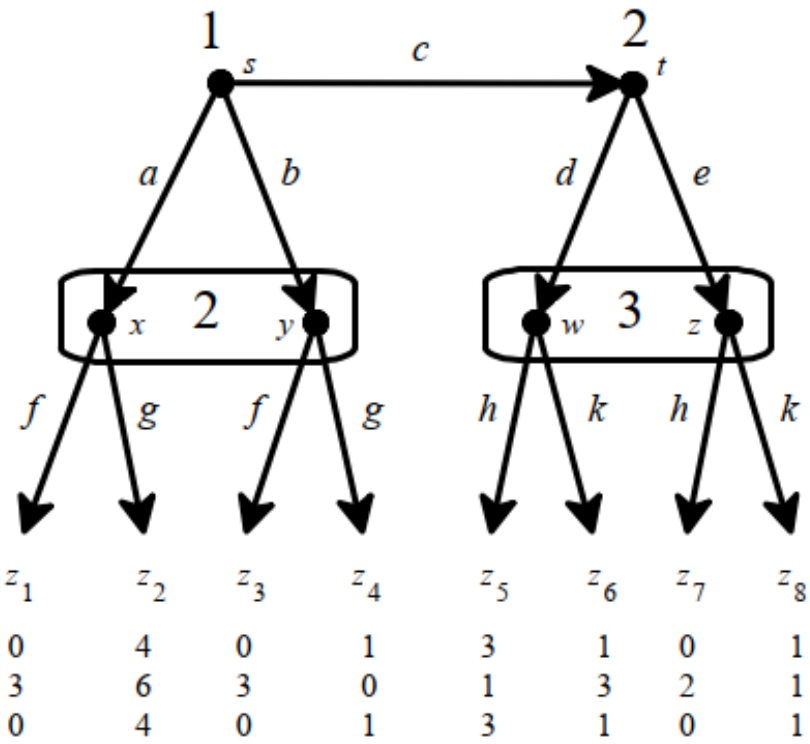


Figure 11.1: An extensive-form game with cardinal payoffs.
(Game Theory, G. Bonanno, p.370)

- Tiene un único subjuego propio,

empezando en t, con equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

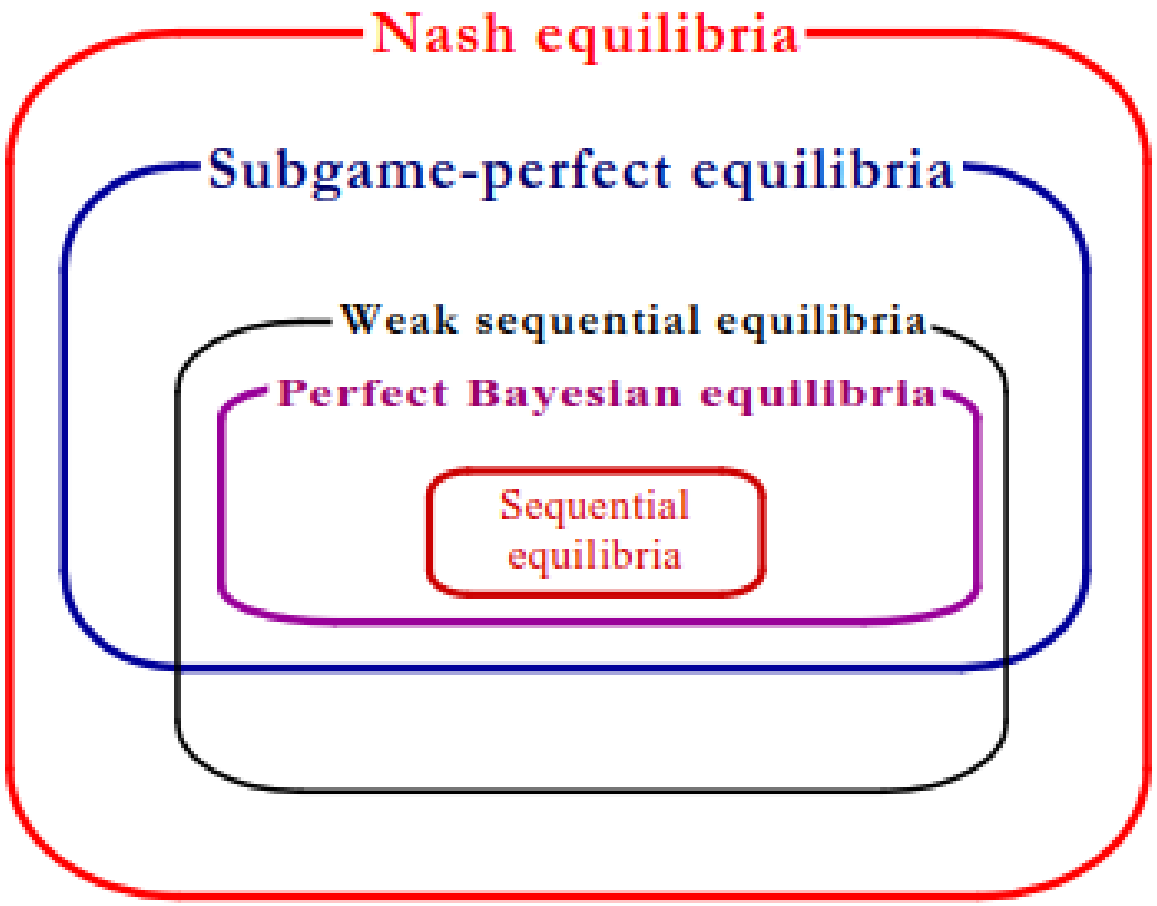
- Si 1 elige b, el conjunto de información del jugador 3 no es alcanzable y por lo tanto sus creencias pueden ser cualquiera, en particular le puede asignar probabilidad 1 a estar en w y por lo tanto jugar h.

- Dado esto el jugador 2 debe jugar e en el nodo t.

- En $H = \{x, y\}$ las creencias de actualización Bayesiana asignan probabilidad 1 a estar en y y por lo tanto 2 debe jugar f en ese conjunto de información.

- Finalmente dada las estrategias de 2 y 3, el pago esperado de 1 es cero para sus tres estrategias, por lo tanto cualquier es una mejor respuesta, en particular b

- Tenemos un ESD que no es ENPS !



(Game Theory, G. Bonanno, p. 440)